Nombres de BELL

[FRANCINOU-GIANELLA-NICOLAS 1, p 14]

ÉNONCÉ :

Théorème : Soit $n \geq 0$. on note B_n le nombre de partitions distinctes de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ (avec $B_0 = 1$).
Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$B_k = \frac{1}{e}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!}\right)$$

DÉVELOPPEMENT :

LEMME : La série entière de terme général $\frac{B_n}{n!}z^n$ a un rayon de convergence $R > 0$ et sa somme vérifie

$$\forall z \in]-R, R[, \;\; f(z) = e^{e^z - 1}$$

Démonstration. En notant E_k l'ensemble des partitions de $\{1, 2, \ldots, n+1\}$ pour lesquelles la partie contenant $(n+1)$ est de cardinal $(k+1)$, on a $|E_k| = \binom{n}{k}B_{n-k}$. En effet, il suffit de remarquer qu'on a $\binom{n}{k}$ choix d'une partie contenant $(n+1)$ et on a B_{n-k} choix pour réaliser les partitions des $(n-k)$ éléments restants.

Par récurrence, on montre que $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k$. Cette relation est vérifié pour $n = 0$ car $B_1 = 1$. Supposons le résultat vrai pour pour tout entier inférieur ou égal à n. $\{E_0, E_1, \ldots, E_n\}$ formant une partition de $\{$partitions de $\{1, 2, \ldots, n+1\}\}$, il vient :

$$\begin{aligned} B_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} |E_k| \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \end{aligned}$$

Montrons désormais par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}_n$: "$B_n \leq n!$".
Pour $n = 0$, c'est évident et en supposant que $\mathcal{P}_k$ est vraie pour tout $k \leq n$, on a :

$$\begin{aligned} B_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \\ &\leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k! \\ &= n! \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{1}{(n-k)!}}_{\leq 1} \\ &\leq n! \sum_{k=0}^{n} 1 \\ &= (n+1)! \end{aligned}$$

d'où $\mathcal{P}_{n+1}$ vraie.

On en déduit ainsi que $\frac{B_n}{n!} = O(1)$. Le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{B_n}{n!} z^n$, noté R, est plus grand ou égal à 1, et donc en particulier strictement positif. Ainsi, pour $z \in]-R, R[$, on a :

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n\geq 0} \frac{B_n}{n!} z^n \\ &= 1 + \sum_{n\geq 0} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} z^{n+1} \end{aligned}$$

Par dérivation terme à terme de cette série entière on obtient :

$$\begin{aligned} f'(z) &= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \right) z^n \\ &= \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{k!(n-k)!} \right) z^n \end{aligned}$$

On reconnaît le produit de CAUCHY entre les deux séries $\sum_{n\geq 0} \frac{B_n}{n!} z^n$ et $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ ayant toutes les deux un rayon de convergence supérieur ou égal à R. Ainsi, pour tout $z \in]-R, R[$, on a : $f'(z) = f(z)e^z$. Il existe donc un $C \in \mathbb{R}$ tel que $f(z) = e^{e^z}$ pour tout $z \in]-R, R[$. Or $f(0) = B_0 = 1$, ce qui implique que $C = \frac{1}{e}$, d'où $f(z) = e^{e^z - 1}$. □

Démonstration. (*théorème*) : On a pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} e^{e^z} &= \sum_{n\geq 0} \frac{e^{nz}}{n!} \\ &= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k\geq 0} \frac{(nz)^k}{k!} \right) \end{aligned}$$

Notons, pour tout $k, n \in \mathbb{N}$, $u_{n,k} = \frac{(nz)^k}{n!k!}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k\geq 0} |u_{n,k}| &= \sum_{k\geq 0} \frac{|nz|^k}{n!k!} \\ &= \frac{e^{|nz|}}{n!} \end{aligned}$$

qui est le terme général d'une série convergeant vers $e^{e^{|z|}}$. Par conséquent, $(u_{n,k})_{n,k}$ est sommable.
Par le théorème de FUBINI, on a, pour tout $z \in]-R, R[$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{e} \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k\geq 0} u_{n,k} \right) \\ &= \frac{1}{e} \sum_{k\geq 0} \left(\sum_{n\geq 0} u_{n,k} \right) \\ &= \frac{1}{e} \sum_{k\geq 0} \left(\sum_{n\geq 0} \frac{n^k}{n!} \right) \frac{z^k}{k!} \end{aligned}$$

Ainsi, par l'unicité du développement en série entière de f sur $]-R, R[$, on en déduit que pour tout $k \geq 0$, $B_k = \frac{1}{e} \sum_{n\geq 0} \frac{n^k}{n!}$. □

Remarques :

- On a montré en particulier qur $R = +\infty$.
- Le développement est plutôt long : il faut être convaincant (à l'oral) sur le calcul du cardinal des partitions afin de se laisser du temps.